第2講　場合の数と確率

1

(1)　硬貨が6枚あり，そのうちの4枚が表，残りの2枚が裏の状態で置かれている．

この6枚の硬貨の中から n 枚を無造作に選び，その n 枚を投げる．その結果，6枚の硬貨のうち表と裏が3枚ずつとなる確率を p_n とする．このとき，p_1，p_2，p_6 を求めよ．ただし，硬貨を投げるとき，表と裏はそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で出るものとする．

(2)　n を自然数とする．1から $3n$ までの数字が書かれた $3n$ 枚のカードをよく切って，3枚を順に取り，1枚目，2枚目，3枚目のカードに書かれた数字をそれぞれ a，b，c とする．ただし，取ったカードは戻さない．$a+b+c$ が3の倍数である確率を求めよ．

(3)　さいころを3回続けて投げ，出る目を順に a_1，a_2，a_3 とする．このとき，$a_1-a_2 \geqq 2$ かつ $a_2-a_3 \geqq 1$ となる確率を求めよ．

2　9個の玉があり，それぞれの玉には，自然数1，2，…，9のいずれか1つが書かれている．

また，それぞれの自然数が書かれた玉は1個ずつである．次の問いに答えよ．

(1)　白い袋と赤い袋と青い袋がそれぞれ1つずつあり，9個の玉を，これらの3つの袋に分けて入れるとする．

どの袋にも3個の玉が入るような玉の入れ方は何通りあるか．

(2)　区別のつかない3つの袋があり，9個の玉を，これら3つの袋に分けて入れるとする．

(i)　どの袋にも3個の玉が入るような玉の入れ方は何通りあるか．

(ii)　3つの袋のうち，2つの袋にはそれぞれ2個の玉が，1つの袋には5個の玉が入るような玉の入れ方は何通りあるか．

(iii)　どの袋にも2個以上の玉が入るような玉の入れ方は何通りあるか．

(3)　区別のつかない2つの袋がある．一方の袋には，9個の玉のうち，奇数が書かれている玉のすべてが入っていて，もう一方の袋には，9個の玉のうち，偶数が書かれている玉のすべてが入っている．どちらか一方の袋を選び，選んだ袋の中から2個の玉を同時に取り出す．

(i)　取り出した玉に書かれている自然数がともに奇数で，それらの和が3の倍数である確率を求めよ．

(ii)　取り出した玉に書かれている自然数の和が3の倍数であったとき，それらの自然数がともに奇数である確率を求めよ．

3　次の $\boxed{}$ に適する数または式を求めよ．

k を3以上の整数とする．1から k までの番号を1つずつつけた k 個の玉と，同様に番号をつけた k 個の箱を用意する．この k 個の玉を1つの袋に入れ，この袋から玉を1個ずつ取り出して番号が1の箱から順に1個ずつすべての箱に入れていく．

このとき，袋から一度取り出した玉は袋に戻さないとする．すべての箱で玉の番号と箱の番号が異なる事象を考える．

この事象の起こる場合の数を $N(k)$ とし，この事象が起こる確率を $P(k)$ とすると，

$N(3)=\boxed{}$，$P(3)=\boxed{}$．また，$N(4)=\boxed{}$ であり，

$N(5)=\boxed{}\times(N(4)+N(3))$ であるので，一般の k のときの確率の関係式は

$P(k+2)=\dfrac{k+1}{k+2}P(k+1)+\boxed{}P(k)$．

第２講　場合の数と確率

1 (1) p_1 は，6 枚の硬貨から表の状態の硬貨を選び，その硬貨を投げて裏が出る確率である．

よって　$p_1=\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

p_2 は，(i) 6 枚の硬貨から表の状態の硬貨を 2 枚選び，その 2 枚の硬貨を投げて表が 1 枚，裏が 1 枚出る，または，(ii) 6 枚の硬貨から表の状態の硬貨を 1 枚，裏の状態の硬貨を 1 枚選び，その 2 枚の硬貨を投げて，両方とも裏が出る確率である．

よって　$p_2=\dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\times{}_2C_1\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{{}_4C_1\cdot{}_2C_1}{{}_6C_2}\times\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{15}=\dfrac{1}{3}$

p_6 は，6 枚の硬貨をすべて選び，その 6 枚の硬貨を投げて表が 3 枚，裏が 3 枚出る確率である．よって　$p_6={}_6C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{20}{2^6}=\dfrac{5}{16}$

(2) 1 から $3n$ までの自然数を，次の A，B，C の 3 つの集合に分類する．

$\mathrm{A}=\{1,\ 4,\ 7,\ \cdots\cdots,\ 3n-2\}$，$\mathrm{B}=\{2,\ 5,\ 8,\ \cdots\cdots,\ 3n-1\}$，$\mathrm{C}=\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\cdots,\ 3n\}$

$a+b+c$ が 3 の倍数となるのは，

a，b，c がすべて A，すべて B，すべて C に属する場合

a，b，c が A，B，C の異なる 3 つの集合に 1 つずつ属する場合

のいずれかである．よって，求める確率は

$$\frac{n}{3n}\cdot\frac{n-1}{3n-1}\cdot\frac{n-2}{3n-2}\times 3+\frac{n}{3n}\cdot\frac{n}{3n-1}\cdot\frac{n}{3n-2}\times 3!$$

$$=\frac{3n(n-1)(n-2)+6n^3}{3n(3n-1)(3n-2)}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)+2n^2}{(3n-1)(3n-2)}$$

$$=\frac{3n^2-3n+2}{(3n-1)(3n-2)}$$

(3) $a_1-a_2\geqq 2$ かつ $a_2-a_3\geqq 1$ となるのは

$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(6,\ 4,\ 3)$，$(6,\ 4,\ 2)$，$(6,\ 4,\ 1)$，$(6,\ 3,\ 2)$，$(6,\ 3,\ 1)$，
$(6,\ 2,\ 1)$，$(5,\ 3,\ 2)$，$(5,\ 3,\ 1)$，$(5,\ 2,\ 1)$，$(4,\ 2,\ 1)$ の 10 通り．

よって，求める確率は $\dfrac{10}{6^3}=\dfrac{5}{108}$

2 (1) 9 個の区別のつく玉を，3 つの区別のつく袋に 3 個ずつ入れる場合の数で，

$${}_9C_3\cdot{}_6C_3\cdot{}_3C_3=84\cdot 20\cdot 1=1680\ (\text{通り})$$

(2) (i) 9 個の区別のつく玉を，3 つの区別のつかない袋に 3 個ずつ入れる場合の数で，

(1)より $\dfrac{1680}{3!}=280$ (通り)

(ii) 9 個の区別のつく玉を，3 つの区別のつかない袋に 2 個，2 個，5 個ずつ入れる場合の数で，$\dfrac{{}_9C_2\cdot{}_7C_2\cdot{}_5C_5}{2!}=\dfrac{36\cdot 21\cdot 1}{2}=378$ (通り)

(iii)　どの袋にも2個以上の玉が入るとき，3つの袋の玉の個数の組合せは

(3, 3, 3)，(2, 2, 5)，(2, 3, 4) である．

9個の区別のつく玉を，3つの区別のつかない袋に2個，3個，4個ずつ入れる場合の数は，${}_9C_2 \cdot {}_7C_3 \cdot {}_4C_4 = 36 \cdot 35 \cdot 1 = 1260$（通り）

これと(i)，(ii)より，求める場合の数は $378 + 1260 + 280 = 1918$（通り）

(3)　奇数が書かれた玉が入っている袋を選ぶ事象を A，偶数が書かれた玉が入っている袋を選ぶ事象を B，取り出した玉に書かれている自然数の和が3の倍数である事象を C とする．

(i)　求める確率は $P(A \cap C)$ であり，$A \cap C$ が起こるのは，玉に書かれた数の組合せが (1, 5)，(3, 9)，(5, 7) の3通りのとき

よって，求める確率は $P(A \cap C) = P(A) \cdot P_A(C) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{{}_5C_2} = \dfrac{3}{20}$

(ii)　$B \cap C$ が起こるのは，玉に書かれた数の組合せが (2, 4)，(4, 8) の2通りのとき

よって，$P(B \cap C) = P(B) \cdot P_B(C) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{{}_4C_2} = \dfrac{1}{6}$

したがって，$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = \dfrac{3}{20} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{19}{60}$ より，求める確率は

$P_C(A) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{3}{20} \cdot \dfrac{60}{19} = \dfrac{9}{19}$

3　番号1，2，3，……，k の箱に入れた玉をそれぞれ a_1，a_2，a_3，……，a_k とする．

$k=3$ のとき，条件を満たすのは $(a_1, a_2, a_3) = (2, 3, 1)$，$(3, 1, 2)$ の2通り

よって，$N(3) = 2$，$P(3) = \dfrac{N(3)}{3!} = \dfrac{2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{1}{3}$

$k=4$ のとき，条件を満たすのは

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 1, 4, 3)$，$(2, 3, 4, 1)$，$(2, 4, 1, 3)$，
$(3, 1, 4, 2)$，$(3, 4, 1, 2)$，$(3, 4, 2, 1)$，
$(4, 1, 2, 3)$，$(4, 3, 1, 2)$，$(4, 3, 2, 1)$ の9通り

よって，$N(4) = 9$

$k=5$ のとき，条件を満たす $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ について考える．

$a_1 = 2$ とし，以下，番号2，3，4，5の箱に番号1，3，4，5の玉を，条件を満たすように入れる場合を考える．

$a_2 = 1$ のとき　番号3，4，5の箱に番号3，4，5の玉を入れる場合で，

それは番号1，2，3の箱に番号1，2，3の玉を入れる場合と同じである．

よって，$N(3)$ 通り

$a_2 \neq 1$ のとき　番号2の箱に番号1の玉が入らない場合で，

それは番号1，2，3，4の箱に番号1，2，3，4の玉を入れる場合と同じである．

よって，$N(4)$ 通り

よって，$a_1 = 2$ のとき，条件を満たすのは $N(3) + N(4)$ 通りある．

$a_1=3,\ 4,\ 5$ の場合も同様である．

したがって，$N(5)=4\times(N(4)+N(3))$

一般の k のとき，$N(k+2)$ を考える．

$a_1=2$ とする．

　$a_2=1$ のとき，番号 $3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ k+2$ の k 個の箱に番号 $3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ k+2$ の k 個の玉を条件を満たすように入れる場合で，$N(k)$ 通り

　$a_2\neq 1$ のとき，番号 $2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ k+2$ の $k+1$ 個の箱に番号 $2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ k+2$ の $k+1$ 個の玉を条件を満たすように入れる場合で，$N(k+1)$ 通り

$a_1=3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ k+2$ の場合も同様である．

よって，$N(k+2)=(k+1)\times(N(k)+N(k+1))$

したがって，$P(k+2)=\dfrac{N(k+2)}{(k+2)!}=(k+1)\times\left(\dfrac{N(k)}{(k+2)!}+\dfrac{N(k+1)}{(k+2)!}\right)$

$$=\frac{1}{k+2}\cdot\frac{N(k)}{k!}+\frac{k+1}{k+2}\cdot\frac{N(k+1)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{k+1}{k+2}P(k+1)+\frac{1}{k+2}P(k)$$